APPLICATIONS p DÉCOMPOSANTES ET p ABSOLUMENT SOMMANTES

PAR

PIERRE SAPHAR

ABSTRACT

Le propos de cet article est d'étudier des liaisons entre applications p absolument sommantes et applications p décomposantes. On donne ensuite quelques applications.

Introduction

La théorie des applications p absolument sommantes s'est considérablement développée depuis l'article de Pietsch [12]. Par ailleurs, la théorie des probabilités a mené Schwartz (voir notamment [19]) à introduire la classe des applications radonifiantes (pour cet article, il suffit de savoir qu'une application est p radonifiante si et seulement si sa transposée est p décomposante; cf no. 4 pour la définition des applications p décomposantes). La liaison entre applications p radonifiantes et p absolument sommantes a été mise en évidence par. Schwartz [20] dans un théorème de "dualité". Dans cet article, on donne une autre démonstration du théorème de dualité faisant intervenir des techniques de produits tensoriels d'espaces de Banach. Cette présentation mène à des applications nouvelles. Les principaux résultats de cet article ont été résumés dans une note à l'Académie des Sciences [17]. Pour d'autres applications du théorème de dualité, dans l'esprit de cet article on pourra consulter Kwapien [8].

1. Notations et rappels de résultats

a) Les espaces de Banach étudiés sont soit tous réels, soit tous complexes. Si E et F désignent deux espaces de Banach, on note $\mathscr{L}(E,F)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de E dans F. Le dual topologique de E, E', est

Received June 24, 1971

muni de sa topologie naturelle d'espace normé, sauf mention expresse du contraire. Si $x \in E$ et $T \in \mathscr{L}(E,F)$, on note $\| x \|$ la norme de x, $\| T \|$ la norme usuelle de T et ${}^tT$ l'application transposée de T de F' dans E'.

Soit α une $\otimes$ norme sur $E \otimes F$ (cf. [1], [4] ou [18] pour la définition et des propriétés élémentaires des $\otimes$ normes). On note $E \otimes_\alpha F$ le produit tensoriel $E \otimes F$ muni de α et par $E \hat{\otimes}_\alpha F$ le complété. Si $u \in E \otimes F$, on note $u \to {}^tu$ l'isomorphisme de symétrie de $E \otimes F$ dans $F \otimes E$. On définit alors la norme transposée de $\alpha, {}^t\alpha$, par la formule ${}^t\alpha(u) = \alpha({}^tu)$.

Soit (x_i) une suite d'éléments de E, p un nombre réel tel que $1 \leqq p \leqq +\infty, p'$ le nombre conjugué de p, $1/p + 1/p' = 1$.

On note $N_p(x_i)$ le nombre réel fini ou non

$$N_p(x_i) = \left(\sum_i \| x_i \|^p \right)^{1/p} \text{ si } p < +\infty$$

$$= \sup_i \| x_i \|, \; p = +\infty .$$

On désigne par $M_p(x_i)$ l'expression:

$$M_p(x_i) = \sup_{\substack{x' \in E' \\ \| x' \| \leqq 1}} N_p(\langle x_i, x' \rangle).$$

Soit $u \in E \otimes F$, $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$. On pose:

$g_p(u) = \inf N_p(x_i) M_{p'}(y_i)$ la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des représentations de u. On pose aussi:

$$d_p(u) = \inf M_{p'}(x_i) N_p(y_i) = {}^tg_p(u).$$

On sait que g_p et d_p sont des $\otimes$ normes sur $E \otimes F$ ([18] th. 3.1), et que pour tout $u \in E \otimes F$ la fonction $p \to d_p(u)$ (resp $p \to g_p(u)$) est décroissante ([18] th. 3.2 corollaire). Il existe une application linéaire continue naturelle de $E' \hat{\otimes}_{g_p} F$ (resp, $E' \hat{\otimes}_{d_p} F$) dans $\mathscr{L}(E,F)$. On dit que $T \in \mathscr{L}(E,F)$ est p nucléaire à gauche (resp. à droite) si T appartient à l'image de cette application (cf [18] no. 2). L'espace des applications p nucléaires à gauche (resp. à droite) est noté $\mathscr{L}_g^p(E,F)$, (resp. $\mathscr{L}_d^p(E,F)$). Soit M la boule unité de F' munie de la topologie faible et $C(M)$ l'espace de Banach des fonctions définies sur M, à valeurs scalaires et continues. On sait qu'on peut considérer d'une manière naturelle F comme un sous espace de Banach de $C(M)$. à l'aide de l'application linéaire isométrique de E dans $C(M)$: $x \to (x' \to \langle x, x' \rangle)$. Donc $E \otimes F$ est un sous espace vectoriel de $E \otimes C(M)$. On note i

l'injection canonique de $E \otimes F$ dans $E \otimes C(M)$. Si $u \in E \otimes F$, on définit $g_p\backslash(u)$ par la formule: $g_p\backslash(u) = g_p(i(u))$, (cf [1], [5] ou [18] p. 74 pour des propriétés diverses de $g_p\backslash$). On sait notamment que $g_p\backslash$ est une $\otimes$ norme et que si F est isomorphe en tant qu'espace normé à un espace de fonctions continues sur un compact alors sur $E \otimes F$ $g_p = g_p\backslash$. On définit $/d_p$ d'une manière analogue en utilisant le plongement isométrique de E dans $C(K)$, (K étant la boule unité faible de E'). On a la formule: ${}^t(/d_p) = g_p\backslash$.

b) Soit $T \in \mathscr{L}(E,F)$ et p tel que $1 \leqq p \leqq +\infty$. On dit que T est p absolument sommante s'il existe une constante $k > 0$ telle que pour toute suite finite (x_i) de E on ait:

$$N_p(Tx_i) \leqq k M_p(x_i)$$

on pose $\pi_p(T) = \inf k$. L'espace des opérateurs p absolument sommants de E dans F est noté $\pi_p(E,F)$. L'espace $\pi_p(E,F)$ muni de la norme π_p est un espace de Banach. (Voir [9] et [12] pour des propriétés des applications p absolument sommantes).

Identifiant $E' \otimes F$ à l'espace des opérateurs de rang fini de E dans F, on constate que $E' \otimes F$ peut-être considéré comme un sous espace vectoriel de $\pi_p(E,F)$. On montre alors que la norme induite par $\pi_p(E,F)$ sur $E' \otimes F$ est $g_p\backslash$ (cf. [18], No. 7, p. 91). On dit que T est p absolument sommante approximable si T appartient à l'adhérence de $E' \otimes F$ dans $\pi_p(E,F)$ c'est à dire si $T \in E' \hat{\otimes}_{g_p\backslash} F$. On dit que T est quasi p nucléaire, $1 \leqq p \leqq +\infty$, (cf [13] no. 4) s'il existe une suite (x'_i) de E' avec $N_p(x'_i) < +\infty$, telle que pour tout x de E: $\| Tx \| \leqq N_p(\langle x, x'_i \rangle)$. L'ensemble $N_p^Q(E,F)$ des applications quasi p nucléaires de E dans F est un sous espace vectoriel fermé de $\pi_p(E,F)$. On a alors aisément le résultat suivant qui nous sera utile:

Lemme 1. *Si E' ou F vérifie l'hypothèse d'approximation métrique* (cf. [5] p. 178) *et si, de plus, E est réflexif ou E' séparable alors*:

$$E' \hat{\otimes}_{g_p/} F = N_p^Q(E,F) = \pi_p(E,F).$$

Démonstration: En effet, d'après [18], prop. 3.8, $E' \hat{\otimes}_{g_p/} F = N_p^Q(E,F)$ D'après Persson [11], p. 221, $N_p^Q(E,F) = \pi_p(E,F)$.

Le résultat est obtenu.

On rappelle que:

$(E \otimes_{d_p} F)' = \pi_{p'}(E,F')$ (cf [18] th. 3.2)

$(E \otimes_{/d_p} F)' = I_{p'}(E,F')$, (cf[18] no. 6), $I_{p'}(E,F')$ désignant l'espace des applications

T de E dans F', p' intégrales c'est à dire des applications qui se factorisent sous la forme:

$$T : E \xrightarrow{i} C(M) \xrightarrow{A} F',$$

M étant la boule unité faible du dual E' de E, i l'injection canonique de E dans $C(M)$ et A une application p' absolument sommante, (cf [18] p. 90 ou [13] pour des propriétés diverses des applications p' intégrales). Si $T \in I_{p'}(E,F')$ la norme p' intégrale de T, $i_{p'}(T)$ est définie par: $i_{p'}(T) = \inf \pi_{p'}(A)$, la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des représentations de T de la forme Ai. La norme p' intégrale de T est la norme de T en tant qu'élément de $(E \otimes_{/d_p} F)'$.

c) On dit que E est de type $L^p (1 \leqq p \leqq +\infty)$ si E isomorphe en tant qu'espace normé à l'espace $L^p(\Omega, \mu)$ des classes de fonctions définies sur l'espace localement compact à valeurs scalaires, Ω, μ—mesurables et de puissance p ième intégrables, pour la mesure de Radon positive μ. On dit que E est de type C si E est isomorphe en tant qu'espace normé à l'espace des fonctions continues sur un espace compact et à valeurs scalaires muni de sa norme usuelle. Soit I un ensemble, on note $l^p(I)$ l'espace de Banach des familles de scalaires $(a_i)_{i \in I}$ telles que $\sum_i |a_i|^p < +\infty$, $(p < +\infty)$. Si I est égal à l'ensemble des entiers positifs ou nul $l^p(I)$ est noté l^p. Si I est égal à l'ensemble $(1, 2, \cdots n)$ $l^p(I)$ est noté l^p_n; l^p_n peut-être considéré comme un sous espace normé de l^p. Pour $p = +\infty$ on a des définitions analogues en prenant pour norme $\sup_i |a_i|$.

2. Un théorème sur les applications p absolument sommantes

On a le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Soit F un espace de Banach, α un nombre réel tel que* $1 \leqq \alpha < +\infty$, *Considérons les conditions*:

1) *Pour tout $\beta \geqq \alpha$ (resp. pour tout $\beta > \alpha$),* $\pi_\beta(l^\infty, F) = \mathscr{L}(l^\infty, F)$,

2) *Pour tout $\beta \geqq \alpha$ (resp. pour tout $\beta > \alpha$), et pour tout espace C de type C,* $\pi_\beta(C, F) = \mathscr{L}(C, F)$,

3) *Pour tout espace de Banach E et tout $\beta' \leqq \alpha'$ (resp $\beta' < \alpha'$)*

$$\pi_1(F, E) = \pi_{\beta'}, (F, E), \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1, \quad \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} = 1.$$

Alors, 1), 2) et 3) *sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION. on suppose $\beta \geqq \alpha$. La démonstration si $\beta > \alpha$ est analogue. Montrons tout d'abord que 1) et 2) sont équivalentes. L'espace l^∞ étant de type C, il suffit de montrer que 1) entraine 2). La propriété 1) entraine qu'il existe $k > 0$, tel que pour tout $T_1 \in \mathscr{L}(l^\infty, F)$ on ait $\pi_\alpha(T_1) \leqq k \| T_1 \|$. Soit n un entier positif. Utilisant la projection canonique de l^∞ sur l_n^∞ on montre que si $T_2 \in \mathscr{L}(l_n^\infty, F)$, on a encore $\pi_\alpha(T_2) \leqq k \| T_2 \|$. Soit C un espace de type C. Utilisant le Théorème 3 de [10], on montre alors aisément qu'il existe une constante $k_1 > 0$, telle que pour tout $T \in \mathscr{L}(C, F)$ on ait $\pi_\alpha(T) \leqq k_1 \| T \|$. On a donc bien 1) implique 2).

Montrons que 3) $\Rightarrow$ 2). Supposons 3) vérifié et soit C un espace de type C. On sait (cf [18] p. 91) que la norme induite par $\pi_k(F, C)$ sur $F' \otimes C$ est $g_k \backslash$ pour tout k tel que $1 \leqq k \leqq +\infty$. Donc: sur $F' \otimes C$, $g_1 \backslash$ est équivalente à $g_{\beta'} \backslash$, $(\beta' \leqq \alpha')$, ou: sur $F' \otimes C$, g_1 est équivalente à $g_{\beta'}$($g_k = g_k \backslash$ sur $F' \otimes C$); donc: sur $C \otimes F'$, d_1 est équivalente à $d_{\beta'}$, $(\beta' \leqq \alpha')$. Par dualité ([18], th. 3.2) on déduit que $\pi_\beta(C, F'') = \mathscr{L}(C, F'')$ si $\beta \geqq \alpha$. On conclut que 2) est vérifié.

Montrons que 2) $\Rightarrow$ 3). Supposons 2) vérifié. Soit E un espace de Banach, M la boule unité de son dual munie de la topologie faible. Désignons par C l'espace de Banach des fonctions continues définies sur M à valeurs scalaires; sur $C' \otimes F$ $g_\beta \backslash$ est équivalente à $g_\infty \backslash$, $(\beta \geqq \alpha)$. Donc, sur $F \otimes C'$ $/ d_\beta$ est équivalente à $/ d_\infty$.

D'après, [18], p. 90, No. 6, on a par dualité, $I_1(F, C'') = I_{\beta'}(F, C'')$. On sait (cf [6] et [7]) que C'' est de type L^∞. D'après [18] p. 91, on a alors, $\pi_r(F, C'') = I_r(F, C'')$. pour tout r, $1 \leqq r \leqq +\infty$. Donc, $\pi_1(F, C'') = \pi_{\beta'}(F, C'')$. Le résultat est obtenu car on peut considérer E comme un sous espace de Banach de C''.

3. Applications p décomposées

Soit Ω un espace localement compact, μ une mesure de Radon positive sur Ω, p un nombre réel tel que $1 \leqq p < +\infty$, E un espace de Banach. On désigne par $L^p(\Omega, \mu; E)$ l'espace de Banach des classes de fonctions définies sur Ω à valeurs dans E, μ mesurables et de puissance $p$ième intégrables. On sait (cf [2]) que $L^p(\Omega, \mu; E)$ est un espace de Banach de norme Δ_p. Si $f \in L^p(\Omega, \mu; E)$, $\Delta_p(f) = (\int_\Omega \|f\|^p d\mu)^{1/p}$. On pose $L^p = L^p(\Omega, \mu; K)$, ($K$ étant égal au corps des scalaires). Soit $u \in E \otimes L^p$, $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i$ $(x_i \in E, f_i \in L^p)$. On définit l'élément u_1 de $L^p(\Omega, \mu; E)$ par la formule $u_1 = \sum_{i=1}^n x_i f_i$. L'application $u \to u_1$ permet de considérer $E \otimes L^p$ comme un sous espace de $L^p(\Omega, \mu; E)$. Si on note $E \otimes_{\Delta_p} L^p$, le produit tensoriel $E \otimes L^p$ muni de Δ_p et $E \hat{\otimes}_{\Delta_p} L^p$ le completé, on montre aisément que $E \hat{\otimes}_{\Delta_p} L^p = L^p(\Omega, \mu; E)$. Par ailleurs, il existe une application linéaire continue injective de $L^p(\Omega, \mu; E')$ dans $\mathscr{L}(E, L^p)$, $f \to \tilde{f}$, définie de la manière suivante:

pour tout x de E, $\tilde{f}(x)$ est la classe dans L^p de la fonction $\omega \to \langle x, f(\omega)\rangle$. On vérifie immédiatement que $\|\tilde{f}\| \leqq \Delta_p(f)$. L'image de $L^p(\Omega, \mu; E')$ dans $\mathscr{L}(E, L^p)$ par cette application est notée $\Delta_p(E, L^p)$. Si $A \in \Delta_p(E, L^p)$, on dit que A est une application p décomposèe (cf [19] exposé no. 13). Si $A \in \Delta_p(E, L^p)$ il existe f unique de $L^p(\Omega, \mu; E)$ tel que $A = \tilde{f}$. On pose $\Delta_p(A) = \Delta_p(f)$. On a donc: $\|A\| \leqq \Delta_p(A)$. Généralisant un résultat de Persson [11] et Chevet [3], on peut obtenir le résultat suivant.

THÉORÈME 2. *Soit p un nombre réel tel que $1 \leqq p < +\infty$, L^p un espace de type L^p, E un espace de Banach. Alors,*

$$\textit{sur } E \otimes L^p, \ (p > 1) \ \textit{on a } \ g_p \leqq \Delta_p \leqq /d_p.$$

$$\textit{Sur } E \otimes L^1, \ d_1 = g_1 = \Delta_1 = /d_1.$$

DÉMONSTRATION. La relation $g_p \leqq \Delta_p \leqq d_p$ $(p > 1)$ est de Chevet (cf [3] th. 5); voir aussi Persson [11]. Soit M la boule unité faible de E, i l'injection canonique de $E \hat{\otimes}_{\Delta_p} L^p$ dans $C(M) \hat{\otimes}_{\Delta_p} L^p$. Puisque $E \hat{\otimes}_{\Delta_p} L^p = L^p(\Omega, \mu; E)$ et $C(M) \hat{\otimes}_{\Delta_p} L^p = L^p(\Omega, \mu; C(M))$, i est une isométrie. Soit $u \in E \otimes L^p$. On a donc:

$$\Delta_p(i(u)) = \Delta_p(u) \text{ et aussi}$$

$$/d_p(u) = d_p(i(u)).$$

Par ailleurs,

$$g_p(i(u)) \leqq \Delta_p(i(u)) \leqq d_p(i(u)), \text{ d'après le résultat cité de Chevet.}$$

Donc on a bien:

$$g_p(u) \leqq \Delta_p(u) \leqq /d_p(u).$$

Si $p = 1$, g_1 et d_1 sont égales à la norme projective π de Grothendieck (cf [18] th. 3.1 remarque). D'après Grothendieck, sur $E \otimes L^1$, $\pi = \Delta_1$ (cf. [5]). Par ailleurs, $d_1 = /d_1$ sur $E \otimes L^1$. En effet, $(E \otimes_{d_1} L^1)' = \mathscr{L}(E, L^\infty)$, $(E \otimes_{/d_1} L^1)' = I_\infty(E, L^\infty)$ et l'on vérifie sans difficulté que $\mathscr{L}(E, L^\infty) = I_\infty(E, L^\infty)$, en tant qu'espaces normés.

Donc on a bien: $g_1 = \Delta_1 = /d_1$ sur $E \otimes L^1$.

COROLLAIRE 1. $\mathscr{L}_g^p(E, L^p) \supset \Delta_p(E, L^p) \supset E' \hat{\otimes}_{/d_p} L^p$, $1 < p < +\infty$

$$\mathscr{L}_g^1(E, L^1) = \Delta_1(E, L^1) = E' \hat{\otimes}_{/d_1} L^1.$$

COROLLAIRE 2. *Sur $L^1 \otimes E$, $g_1 = d_1 = g_1\backslash$.*

4. Applications p décomposantes

Soient E et F deux espaces de Banach et u une application linéaire continue de E

dans F. Nous dirons avec L. Schwartz ([19] exposé no. 13) que u est p décomposante $(1 \leqq p < +\infty)$ si pour tout espace L^p de type L^p et tout élément $A \in \mathscr{L}(F, L^p)$, l'application Au est p décomposée. Utilisant le théorème du graphe fermé, il est facile de montrer que l'application linéaire $A \to Au$ de $\mathscr{L}(F, L^p)$ dans $\Delta_p(E, L^p)$ est continue. Soit $m(u, L^p)$ sa norme. Désignons par ailleurs par $D_p(E, F)$ l'ensemble des applications p décomposantes de E dans F. Il est clair que $D_p(E, F)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(E, F)$.

Utilisant le Théorème 2, il est possible d'obtenir directement le résultat suivant de L. Schwartz (cf [19] exposé no. 11); voir aussi Kwapien [8].

Théorème 3. *Soient E et F deux espaces de Banach, $u \in \mathscr{L}(E, F)$, et p un nombre réel tel que $1 \leqq p < +\infty$.*

Considérons les conditions:

1) *u est p décomposante,*

2) *est p absolument sommante.*

Alors, pour $p \neq 1$ les conditions 1) *et* 2) *sont équivalentes. De plus, si elles sont vérifiées, on a pour tout espace L^p de type L^p:*

3) $m(u, L^p) \leqq \pi_p({}^t u) = m(u, l^p)$.

Pour $p = 1$, le résultat reste vrai si F est réfléxif et si deplus E' ou F vérifient l'hypothèse d'approximation métrique. En général, on a seulement:

1) implique 2) et 1) implique (3).

Démonstration. Soit p tel que $1 < p + \infty$. Supposons 1) vérifié. Soit $A \in \mathscr{L}(F, l^p)$. Il existe une suite (x_i') d'éléments de F' tels que pour tout $y \in F$, on ait:

$$A(y) = (\langle y, x_i' \rangle)_i \text{ et } \|A\| = M_p(x_i').$$

Soit $x \in E$,

$$\begin{aligned} Au(x) &= (\langle u(x), x_i' \rangle)_i \\ &= (\langle x, {}^t u(x_i') \rangle)_i. \end{aligned}$$

Puisque Au est p décomposée, on a $\Delta_p(A) = N_p(u(x_i'))$.

Or, en général, on a:

$$\Delta_p(A) \leqq m(u, l^p) \; \|A\|. \text{ Donc}$$

$$N_p({}^t u(x_i')) \leqq m(u, l^p) M_p(x_i').$$

Il en résulte que ${}^t u$ est p absolument sommante et:

$$\pi_p({}^t u) \leqq m(u, l^p) \tag{4}$$

Ainsi 1) implique 2) et la relation (4).

Soit p tel que $1 < p < \infty$. Supposons 2) vérifié. Soit L^p un espace de type L^p et $A \in \mathscr{L}(F, L^p)$. Alors, ${}^t u\, {}^t A$ est p absolument sommante de $L^{p'}$ dans E'. Mais L^p est réflexif et vérifie l'hypothèse d'approximation métrique. Donc, d'après le lemme 1, ${}^t u\, {}^t A$ est p absolument sommante approximable: ${}^t u {}^t A$ est un élément de $L^p \hat{\otimes}_{g_p \backslash} E'$. Alors $Au \in E' \hat{\otimes}_{/d_p} L^p$. On a

$$/ d_p(Au) = g_p\backslash({}^t u\, {}^t A) \leqq \| A \| \pi_p({}^t u).$$

Alors, d'après le Théorème 2:

$$\Delta_p(Au) \leqq / d_p(Au) \leqq \| A \| \pi_p({}^t u)$$

On en déduit que Au est p décomposée. Donc, u est décomposante et:

$$m(u, L^p) \leqq \pi_p({}^t u) \tag{5}$$

on constate que 1) et 2) sont équivalentes et, grâce aux relations (4) et (5), que 1) et 2) entrainent la relation (3).

Supposons que $p = 1$ et que 1) est vérifié. On déduit comme dans le cas où $p \neq 1$ que 2) est vérifié et aussi que:

$$\pi_1({}^t u) \leqq m(u, l^1). \tag{4)'$$

Soit L^1 un espace de type L^1 et $A \in \mathscr{L}(F, L^1)$. Alors:

$Au \in E' \hat{\otimes}_{/d_1} L^1$, ($\Delta_1 = /d_1$) sur $E' \otimes L^1$ d'après le Théorème 2), ou: ${}^t u\, {}^t A \in L^1 \hat{\otimes}_{g_1 \backslash} E'$. On a donc:

$$\begin{aligned} \Delta_1(Au) &= / d_1(Au) \\ &= g_1\backslash({}^t u\, {}^t A) \\ &= \pi_1({}^t u\, {}^t A) \\ &\leqq \| A \| \pi_1({}^t u). \text{ On déduit que:} \end{aligned}$$

$$m(u, L^1) \leqq \pi_1({}^t u). \tag{5)'$$

Des relation (4)′ et (5)′ on déduit que la relation (3) est aussi vérifiée. Supposons que $p = 1$, que F est réfléxif et que E' ou F vérifie l'hypothèse d'approximation métrique. Supposons 2) vérifié. Alors, d'après le Lemme 1, ${}^t u \in F \hat{\otimes}_{g_1 \backslash} E'$; donc $u \in E' \hat{\otimes}_{/d_1} F$. Soit L^1 un espace de type L^1 et $A \in \mathscr{L}(F, L^1)$. Alors, $Au \in E' \otimes_{/d_1} L^1$ D'après le Théorème 2, $\Delta_1(Au) = /d_1(Au)$. Donc Au est 1 décomposée. La démonstration est terminée.

Posons alors la définition suivante:

DÉFINITION. Soit E et F deux espaces de Banach et $u \in D_p(E,F)$. On définit δ_p sur $D_p(E,F)$ par:

$$\delta_p(u) = \pi_p({}^t u), \qquad 1 \leqq p < +\infty$$

On a aisèment les corollaires suivants du Théorème 3:

COROLLAIRE 1. *Pour tout p $(1 \leqq p < +\infty)\delta_p$ est une norme sur $D_p(E,F)$. Pour $p \neq 1$, $D_p(E,F)$ muni de δ_p est complet. L'espace $D_1(E,F)$ muni de δ_1 est complet si, F est réflexif et si de plus E' ou F vérifie l'hypothèse d'approximation métrique.*

COROLLAIRE 2. *Soit p tel que $1 \leqq p < +\infty$. Considérons $E' \otimes F$ comme un sous espace vectoriel de $D_p(E,F)$. Alors la norme δ_p sur $E' \otimes F$ est égale à $/d_p$.*

REMARQUE. Puisque $/d_p \leqq d_p$, on retrouve le fait que toute application p nucléaire à droite cf [18] p. 81) est p-décomposante. Cette propriété est de Badrikian [1a].

COROLLAIRE 3. *Si F est réflexif et si de plus, F ou E' vérifie* l'*hypothèse d'approximation métrique alors $D_p(E,F) = E' \hat{\otimes}_{/d_p} F$, $(1 \leqq p < +\infty)$.*

En effet, si $u \in D_p(E,F)$ on a ${}^t u \in \pi_p(F',E')$, d'après le Théorème 3. Mais d'après a Lemme 1, ${}^t u \in F \hat{\otimes}_{g_p \backslash} E'$; donc $u \in E' \hat{\otimes}_{/d_p} F$. Le résultat est obtenu.

COROLLAIRE 4. *Soit L^p un espace de type $L^p(1 < p < +\infty)$* et *$u \in \mathscr{L}(L^{p'}, L^p)$. Considérons les conditions*

1) *u est p nucléaire à gauche,*
2) *u est p nucléaire à droite,*
3) *u est p absolument sommante,*
4) *${}^t u$ est p absolument sommante,*
5) *u est p décomposée,*
6) *${}^t u$ est p décomposée,*
7) *u est p décomposante*
8) *${}^t u$ est p décomposante*

Alors, ces huit conditions sont équivalentes.

L'équivalence entre 1) et 2) est de Chevet [3]. L'équivalence entre 1), 3) et 5) est de Persson [11].

DÉMONSTRATION. Soit E un espace de Banach. D'après le Théorème 2 on a: sur $E \otimes L^p$, $g_p \leqq \Delta_p \leqq /d_p$. Donc, par transposition:

sur $L^p \otimes E$, $d_p \leqq {}^t\Delta_p \leqq g_p/$.

Sur $L^p \otimes L^p$, on a alors:

$$d_p \leqq {}^t\Delta_p \leqq g_p\backslash \leqq g_p \leqq \Delta_p \leqq /d_p \leqq d_p.$$

Toutes ces normes sont donc identiques sur $L^p \otimes L^p$. On en déduit le résultat voulu en utilisant le Lemme 1 et le Corollaire 3.

THÉORÈME 4. *Soient E et G deux espaces de Banach tels que G soit isomorphe en tant qu'espace vectoriel topologique à un sous espace M d'un espace de type* $L^p(1 \leqq p < +\infty)$ et $u \in \mathscr{L}(E,G)$. *On désigne par i l'injection canonique de M dans L^p et par A l'isomorphisme de G sur M. Alors, si iAu est p décomposée, u est quasi p nucléaire et l'on a:*

$$\pi_p(u) \leqq \|A^{-1}\| \Delta_p(iAu)$$

DÉMONSTRATION. Soit $u \in \mathscr{L}(E,G)$, tel que iAu soit p-décomposé.

Alors $iAu \in E' \hat{\otimes}_{\Delta_p} L^p$ et l'on a, d'après le Théorème 2:

$$g_p\backslash(iAu) \leqq g_p(iAu) \leqq \Delta_p(iAu).$$

Donc Au est p absolument sommante car $\pi_p(Au) = \pi_p(iAu) = g_p\backslash(iAu)$, (cf. [18], no. 7 p. 91). Par ailleurs, $u = A^{-1}Au$. Donc, u est p absolument sommante et:

$$\begin{aligned} \pi_p(u) &\leqq \|A^{-1}\| \pi_p(Au) \\ &\leqq \|A^{-1}\| \Delta_p(iAu). \end{aligned}$$

De plus, $g_p\backslash(iAu)$ étant fini, iAu est quasi p nucléaire (cf [18] p. 92) et l'on en déduit aisément qu'il en est de même de u.

THÉORÈME 5. *On fait sur G et p les mêmes hypothèses que dans le Théorème 4. Alors, sur $E \otimes G$, on a $g_p\backslash \leqq \|A^{-1}\| \; \|A\| /d_p$. De plus, toute application u p décomposante de E dans G est quasi p nucléaire et: $\pi_p(u) \leqq \|A^{-1}\| \; \|A\| \delta_p(u)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $v \in E \otimes G$. On peut identifier v à une application de E' dans G. D'après le théorème 4 on a:

$$g_p\backslash(v) \leqq \|A^{-1}\| \Delta_p(iAv)$$

D'après le Théorème 2, on a:

$$\begin{aligned} \Delta_p(iAv) &\leqq /d_p(iAv) \\ &\leqq \|A\| /d_p(v). \end{aligned}$$

Donc: $g_p\backslash(v) \leqq \|A^{-1}\| \; \|A\| /d_p(v)$.

Par ailleurs, si $u \in D_p(E,G)$, iAu est p décomposée, donc $u \in N_p^Q(E,G)$ d'après le Théorème 4. De plus: $\pi_p(u) \leqq \|A^{-1}\| \Delta_p(iAu) \leqq \|A^{-1}\| \; \|A\| \delta_p(u)$.

Nous aurons besoin pour démontrer les Théorème 6 et 7 du lemme suivant:

LEMME 2. *Soit E et F deux espaces de Banach. M un sous espace de Banach de F tel qu'il existe une projection linéaire continue P de F sur M, α une $\otimes$ norme et $u \in E \otimes M$. Désignons par $\alpha(u; E, F)$ la norme de u en tant qu'élément de $E \otimes F$. Alors, on a:*

$$\alpha(u; E, F) \leqq \alpha(u) \leqq \| P \| \alpha(u; E, F).$$

DÉMONSTRATION. Soit i l'injection canonique de M dans F. Alors, on a:

$$\begin{aligned} \alpha(u; E, F) &= \alpha((1 \otimes i)(u)). \\ &\leqq \| i \| \ \alpha(u) \\ &\leqq \alpha(u). \text{ Par ailleurs,} \\ u &= (1 \otimes P)\ (1 \otimes i)(u)), \\ \alpha(u) &\leqq \| P \| \ \alpha((1 \otimes i)(u)), \\ &\leqq \| P \| \ \alpha(u; E, F). \end{aligned}$$

THÉORÈME 6. *Soit H un espace de Hilbert et E un espace de Banach. Alors pour tout p tel que $1 \leqq p < +\infty$, il existe une constante $\lambda_p > 0$, telle que sur $E \otimes H$, on ait $g_1\backslash \leqq \lambda_p / d_p$. De plus, $D_p(E, H) \subset E' \hat{\otimes}_{g_1} H$ (autrement dit toute application p décomposante de E dans H est 1 sommante approximable).*

DÉMONSTRATION. D'après le Lemme 2, on constate qu'il suffit de démontrer l'inégalité avec $H = l^2$. On désigne par $L^q(0,1)$, $(1 \leqq q < +\infty)$, l'espace de Banach des classes de fonctions définies sur $[0, 1]$, à valeurs scalaires, de puissance q ième intégrables pour la mesure de Lebesgue et par γ_q l'application de l^2 dans $L^q(0,1)$, définie par:

$(a_n) \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n$, les r_n étant les fonctions de Rademacher (cf [21], p. 212). D'après l'inégalité de Kintchine (cf [21], p. 213, th. 8.4)), l'espace vectoriel $\gamma_q(l^2)$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel topologique à l^2. On désigne par j_q l'injection naturelle de $L^q(0,1)$ dans $L^1(0,1)$. Il est clair que $j_q \gamma_q(l^2)$ est un sous espace vectoriel de $L^1(0,1)$, indépendant de q. Soit $u \in E \otimes l^2$, on identifie u à une application de E' dans l^2. Désignons par γ_1^{-1}l'application de $\gamma_1(l^2)$ sur l^2 réciproque de γ_1. Alors:

$$\begin{aligned} g_1\backslash(u) &= g_1\backslash(\gamma_1^{-1}\gamma_1 u) \\ &\leqq \| \gamma_1^{-1} \| \, g_1\backslash(\gamma_1 u) \\ &\leqq \| \gamma_1^{-1} \| \Delta_1(\gamma_1 u), \text{ d'après le Théorème 2,} \\ &\leqq \| \gamma_1^{-1} \| \, \Delta_q(\gamma_q u), \text{ (car l'injection naturelle de } L^q(0,1), \end{aligned}$$

dans $L^1(0,1)$ est de norme inférieure ou égale à 1). Alors:

$$\begin{aligned} g_1\backslash(u) &\leqq \|\gamma_1^{-1}\| /d_q(\gamma_q u), \text{ d'après le Théorème 2,} \\ &\leqq \|\gamma_1^{-1}\| \, \|\gamma_q\| /d_q(u). \end{aligned}$$

C'est l'inégalité cherchée.

Par ailleurs, l'espace de Hilbert H est réflexif et vérifie l'hypothèse d'approximation métrique. D'après le Corollaire 3 du Théorème 3, $D_p(E,H) = E' \hat{\otimes}_{/d_p} H$. En utilisant l'inégalité qui vient d'être démontrée on obtient le résultat voulu.

Théorème 7. *Soit E un espace de Banach et L^p un espace de type L^p avec $1 < p < 2$. Alors, pour tout r tel que $1 \leqq r < p$, il existe une constante $\mu_r > 0$, telle que sur $E \otimes L^p$, on ait $g_1\backslash \leqq \mu_r /d_r$. De plus, $D_r(E, L^p) \subset E' \hat{\otimes}_{g_1\backslash} L^p$, (autrement dit toute application r décomposante de E dans L^p est absolument sommante approximable).*

Démonstration. 1) On prend pour espace L^p de type L^p l'espace $L^p(0,1)$. Soit j_p l'injection naturelle de L^p dans L^1. On sait alors qu'il existe une famille d'applications $\gamma_r (1 \leqq r < p)$ de L^p dans L^r linéaires continues telles que $\gamma_r(L^p)$ soit isomorphe à L^p en tant qu'espace vectoriel topologique et que $j_r\gamma_r(L^p)$ soit un sous espace de L^1 indépendant de r (cf [19] Prop. xv. 6.1). Soit $u \in E \otimes L^p$. On identifie u à une application linéaire continue de E' dans L^p. On désigne par γ_1^{-1} l'application réciproque de γ_1 de $\gamma_1(L^p)$ dans L^p.

On a:

$$\begin{aligned} g_1\backslash(u) &= g_1\backslash(\gamma_1^{-1}\gamma_1 u) \\ &\leqq \|\gamma_1^{-1}\| \, g_1\backslash(\gamma_1 u) \\ &\leqq \|\gamma_1^{-1}\| \, \Delta_1(\gamma_1 u), \text{ d'après le Théorème 2.} \\ &\leqq \|\gamma_1^{-1}\| \, \Delta_r(\gamma_r u), \text{ car l'injection naturelle de } L^r(0,1) \end{aligned}$$

dans $L^1(0,1)$ est de norme inférieure ou égale à 1,

$$\begin{aligned} g_1\backslash(u) &\leqq \|\gamma_1^{-1}\| /d_r(\gamma_r u), \text{ d'après le Théorème 2.} \\ &\leqq \|\gamma_1^{-1}\| \, \|\gamma_r\| /d_r(u). \end{aligned}$$

Donc, l'inégalité est obtenue sur $E \otimes L^p(0,1)$.

2) Soit p tel que $1 < p < 2$. On sait que tout sous espace $l_n^p (n \geqq 1)$ peut être considéré comme isomorphe, en tant qu'espace normé, à un sous espace M_p de $L^p(0,1)$, tel qu'il existe une projection P de $L^p(0,1)$ sur M_p de norme inférieure ou égale à 1. On déduit alors de 1) et du Lemme 2 qu'il existe une constante $a_r > 0$,

$(1 \leqq r < p)$ telle que pour tout $n \geqq 1$ et tout $v \in E \otimes l_n^p$ on ait: $g_1\backslash(v) \leqq a_r/d_r(v)$. On conclut alors que l'inégalité voulue est vérifiée sur $E \otimes L^p$, quel que soit l'espace L^p de type L^p, en utilisant le théorème III de [10] p. 357.

L'espace L^p étant réflexif et vérifiant la condition d'approximation métrique on a $D_r(E, L^p) = E' \hat{\otimes}_{/d_r} L^p$ d'après le Corollaire 3 du Théorème 3. On en déduit immédiatement que $D_r(E, L^p) \subset E' \hat{\otimes}\, g_1\backslash L^p$.

COROLLAIRE. *Sur $L^p \otimes E$, on a $/d_1 \leqq \mu_r\, g_r\backslash$, si $1 \leqq p < 2$ et $1 \leqq r < p$.*

5. Applications

Les théorèmes précedents permettent d'obtenir des propriétés nouvelles des applications p absolument sommantes et p décomposantes.

THÉORÈME 8. *Soit L un espace de type L^1, C un espace de type C, H un espace de Hilbert. Alors, sur $L \otimes H$, d_1 est équivalente à $/d_p$ et d_p pour $1 \leqq p < +\infty$. De plus:*

$$\mathscr{L}(L,H) = I_q(L,H), \quad 1 < q \leqq +\infty\,;$$

$\mathscr{C}(L,H) = \mathscr{L}_g^q(L,H)$, *(on désigne par $\mathscr{C}(L,H)$ l'ensemble des opérateurs compacts de L dans H), $1 < q \leqq +\infty$, $D_p(C,H) = \mathscr{L}_g(C,H)$, $1 \leqq p < +\infty$* (on rappelle que $\mathscr{L}_g^1(C,H)$ est égal à l'ensemble des opérateurs nucléaires de C dans H, cf [18] p. 81).

DÉMONSTRATION. D'après le Théorème 6, on a sur $L \otimes H$, $g_1\backslash \leqq \lambda_p/d_p$ $(1 \leqq p < +\infty)$. Mais sur $L \otimes H$, $d_1 = g_1 = g_1\backslash$ (d'aprés le Théorème 2, Corollaire 2). Donc, on a sur $L \otimes H$:

$$d_1 \leqq \lambda_p/d_p \leqq \lambda_p d_p \leqq \lambda_p d_1.$$

On conclut que sur $L \otimes H$, les normes $d_1, /d_p$ et d_p sont équivalentes. Par dualité ([18] th. 3.2 et no. 6 p. 90) on obtient à partir de l'équivalence de d_1 et $/d_p$ que:

$$\mathscr{L}(L,H) = I_q(L,H) \quad 1 < q \leqq +\infty.$$

D'après ([13] satz 35; voir aussi [18] p. 93, résumé) la norme induite par $I_q(L,E)$ sur $L^\infty \otimes E$ est g_q. Donc, on déduit de l'égalité précédente que:

$$\mathscr{C}(L,H) = \mathscr{L}_g^q(L,H), \qquad 1 < q \leqq +\infty.$$

Par ailleurs, on sait que que le dual d'un espace de type C est de type L (cf Kakutani [7]). Donc, sur $C' \otimes H$, d_1 est équivalente à $/d_p$. Utilisant le corollaire 3 du théorème 3, on déduit que:

$$D_p(C,H) = \mathscr{L}_g^1(C,H), \qquad 1 \leqq p < +\infty.$$

THÉORÈME 9. *Soit L un espace de type L^1, L^p un espace de type $L^p(2<p<+\infty)$, C un espace de type C. Alors, sur $L \otimes L^{p'}$, d_1 est équivalente à d_r et $/d_r$ $(1 \leqq r < p')$. De plus:*

$$\mathscr{L}(L,L^p) = I_q(L,L^p) = \pi_q(L,L^p), \qquad p < q \leqq +\infty,$$

$$D_r(C,L^p) = \mathscr{L}_g^1(C,L^p) \qquad 1 \leqq r < p'.$$

$\mathscr{C}(L,L^p) = \mathscr{L}_g^q(L,L^p)$, $p < q \leqq +\infty$, si $\mathscr{C}(L,L^p)$ est l'espace des opérateurs compacts de L dans L^1.

DÉMONSTRATION.: D'après le Théorème 7, sur $L \otimes L^{p'}$, on a $g_1 \backslash \leqq \mu_r /d_r$, $(1 \leqq r < p')$. Mais $g_1 = g_1\backslash = d_1$ sur $L \otimes L^{p'}$. (D'après le Théorème 2, Corollaire 2). Donc, on a aussi:

$$d_1 \leqq \mu_r /d_r \leqq \mu_r d_r \leqq \mu_r d_1, \qquad (1 \leqq r < p').$$

Par dualité ([18] th. 3.2 et no. 6 p. 90), on obtient:

$$\mathscr{L}(L,L^p) = I_q(L,L^p) = \pi_q(L,L^p), \qquad p < q \leqq +\infty.$$

La norme induite par $I_q(L,E)$ sur $L^\infty \otimes E$ étant g_q(cf [13] satz 35 ou [18] p. 93, résumé) on déduit que

$$\mathscr{C}(L,L^p) = \mathscr{L}_g^q(L,L^p), \qquad p < q \leqq +\infty.$$

Par ailleurs, l'espace C' étant de type L^1, le Corollaire 3 du Théorème 3 nous donne immédiatement:

$$D_r(C,L^p) = \mathscr{L}_g^1(C,L^p), \qquad 1 \leqq r < p'.$$

THÉORÈME 10. *Soit E un espace de Banach et L^p un espace de type L^p $(2 < p < +\infty)$. Alors, on a:*

$$\pi_q(L^p,E) = \pi_1(L^p,E) = L^{p'} \hat{\otimes}_{g_1} \backslash E \qquad 1 \leqq q < p'.$$

DÉMONSTRATION. Soit $u \in \pi_q(L^p,E)$, alors d'après([12] th 2) u se factorise sous la forme:

$$u: L^p \xrightarrow{v_1} G \xrightarrow{A} E,$$

G étant un sous espace fermé d'un espace L^q de type L^q, A une application linéaire continue, v_1 un élément de $\pi_q(L^p,G)$. Soit i l'injection naturelle de G dans L^q. Il nous suffit de montrer que iv_1 est un élément de $\pi_1(L^p,L^q)$ ou encore que

$\pi_q(L^p, L^q) = \pi_1(L^p, L^q)$.. D'après le Lemme 1, il suffit pour cela que sur $L^{p'} \otimes L^q$, g_1 soit équivalente à $g_q\backslash$. Soit $u \in L^{p'} \otimes L^q$. On a:

$g_1\backslash(u) \leqq \mu_1 / d_1(u)$, d'après le Théorème 7,

$g_1\backslash(u) \leqq \mu_1 \mu_q g_q\backslash(u)$, $1 \leqq q < p'$, d'après le corollaire du Théorème 7,

(les constantes μ_q et μ_1 ne dépendent que des espaces L^p et L^q).

Puisque $g_q\backslash(u) \leqq g_1\backslash(u)$, le résultat est obtenu.

A l'aide des Théorème 1 et 10 on retrouve immédiatement le résultat de Kwapien ([8], th. 7 et remark 4);

COROLLAIRE. *Soit C un espace de type C et L^p un espace de type L^p $(2 < p < +\infty)$. Alors, $\mathscr{L}(C, L^p) = \pi_h(C, L^p)$, $p < h \leqq +\infty$.*

REMARQUE. Les résultats des Théorèmes 7, 8, 9, 10 faisant intervenir des espaces de type L^p peuvent être sans difficulté étendus aux espaces $\mathscr{L}^p$ de Lindenstrauss et Pelczynski (cf [9]).

REFERENCES

1. J. Amemiya et S. Koji, *On tensor products of Banach spaces*, Kodai Math. Sem. Rep. **9** (1957), 161–176.

1a. A. Badrikian, *Sur quelques questions de la théorie des processus* C. R. Acad. Sci., Paris, **265** (1967), 662–664.

2. N. Bourbaki, *Intégration*, chap. 6, Hermann, 1959.

3. S. Chevet, *Sur certains produits tensoriels d'espaces de Banach*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete. **11** (1969), 120–138.

4. A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. Sâo Paulo, **8** (1956), 1–79.

5. A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. (1955).

6. S. Kakutani, *Concrete representation of Abstract L Spaces and the mean ergodic theorem*, Ann. of Math. **42** (1941), 523–537.

7. S. Kakutani, *Concrete representation of abstract M spaces*, Ann. of Math. **42** (1941), 994–1024.

8. S. Kwapien, *On a theorem of L. Schwartz and its aplications to absolutely summing operators*, Studia Math. **38** (1970), 193–201.

9. J. Lindenstrauss and A. Pelczynski, *Absolutely summing operators in $\mathscr{L}^p$ spaces and applications*, Studia Math. **29** (1968), 275–236.

10. J. Lindenstrauss and H. Rosenthal, *The $\mathscr{L}^p$ spaces*, Israel J. Math. **7** (1969), 325–349.

11. A. Persson, *On some properties of p nuclear and p integral operators*, Studia Math. **33** (1969), 213–222.

12. A. Pietsch, *Absolute p summierend Abbildungen in normierten Raumen*, Studia Math. **28** (1967), 333–353.

13. A. Pietsch and A. Persson, *p nuklear und p integrale Abbildungen in Banachraumen*, Studia Math. **33** (1969), 19–62.

14. P. Saphar, *Produits tensoriels topologiques et classes d'applications linéaires*, C. R. Acad. Sci., Paris **266** (1968), 526–528.

15. P. Saphar, *Comparaisons de normes sur des produits tensoriels d'espaces de Banach.* Applications, C. R. Sci., Paris **266** (1968), 809–811.

16. P. Saphar, *Quelques propriétés des normes tensorielles* g_k *et* d_k, C. R. Acad. Sci., Paris **268** (1969), 528–531.

17. P. Saphar, *Applications p sommantes et p décomposantes*, C. R. Acad. Sci., Paris **270** (1970), 1093–1096.

18. P. Saphar, *Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications linéaires*, Studia Math., **38** (1970), 71–100.

19. L. Schwartz, *Séminaire de l'école Polytechnique* 1969–1970, Paris, 1970.

20. L. Schwartz, *Un théoreme de dualité pour les applications radonifiantes*, C. R. Acad. Sci., Paris, **268** (1969), 1410–1413.

21. Zygmund, *Trigonometric series*, t. 1.

Department of Mathematics
Technion — Israel Institute of Technology, Haifa